ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ1ο

Α. Θεώρημα (Fermat) σελ. 260 σχολ. βιβλίου.

Β. Ορισμός σελ. 213 σχολ. βιβλίου.

Γ.

α	β	γ	δ	ε
Σ	*	Λ	Λ	Σ

(*) Η απάντηση στο ερώτημα 1 Γ β μπορεί να χαρακτηρισθεί Σωστό μόνο εφ' όσον η συνάρτηση f είναι ορισμένη σε σύνολο της μορφής $(a,x_0)\cup(x_0,\beta)$. Όπως είναι διατυπωμένη, σωστό είναι μόνο το αντίστροφο. Δηλαδή αν $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=l \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$, αφού για την περίπτωση του ευθέως μπορεί να θεωρηθούν ως σύνολα ορισμού της f και τα μεμονωμένα σύνολα (a,x_0) ή (x_0,β). Επομένως από <u>αυστηρή μαθηματική άποψη</u>, η απάντηση είναι Λάθος.

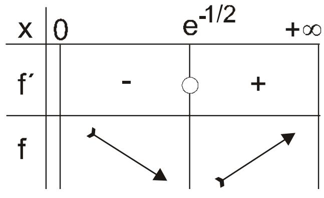
ΘΕΜΑ1ο

α. Πρέπει x>0. Άρα $A_f=(0,+\infty)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,+\infty)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων σ' αυτό με

$$f'(x)=(x^2\cdot\ln x)'=(x^2)'\cdot\ln x+x^2(\ln x)'=$$
$$=2x\cdot\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}=2x\cdot\ln x+x=x\cdot(2\ln x+1)$$

Έχουμε:
$f'(\mathrm{x})=0 \Leftrightarrow \; x\cdot(2\ln x+1)=0$. Οπότε:
x=0 απορρίπτεται αφού $A_f=(0,+\infty)$
ή $2\ln x+1=0\Leftrightarrow \ln x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}$.



T. min.

Επομένως η συνάρτηση f είναι:

- Γνησίως φθίνουσα στο $(0,e^{-\frac{1}{2}}]$, αφού είναι συνεχής στο $(0,e^{-\frac{1}{2}}]$ και ισχύει ότι f ΄(x) <0 στο $(0,e^{-\frac{1}{2}})$.

- Γνησίως αύξουσα στο $[e^{-\frac{1}{2}},+\infty)$, αφού είναι συνεχής στο $[e^{-\frac{1}{2}},+\infty)$ και ισχύει ότι f ΄ (x) >0 στο $(e^{-\frac{1}{2}},+\infty)$.

Άρα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=e^{-\frac{1}{2}}$ το
$f(e^{-\frac{1}{2}})=(e^{-\frac{1}{2}})^2\cdot\ln e^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}\cdot e^{-1}=-\frac{1}{2e}$

β. Η f είναι και 2η φορά παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως γινόμενο δις παραγωγίσιμων συναρτήσεων σε αυτό μέ $f''(x)=(2x\cdot\ln x+x)'=2\ln x+2+1=2\ln x+3$.

Έχουμε:

$$f''(\mathrm{x})=0\Leftrightarrow 2\ln x+3=0\Leftrightarrow \ln x=-\frac{3}{2}\Leftrightarrow x=e^{-\frac{3}{2}}$$

x	0		$e^{-3/2}$		$+\infty$
f΄΄		-	0	+	
f					

Σ.Κ

$$f(e^{-\frac{3}{2}})=(e^{-\frac{3}{2}})^2\cdot\ln(e^{-\frac{3}{2}})=-\frac{3}{2}e^{-3}=-\frac{3}{2e^3}.$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι:

- κοίλη στο $(0,e^{-\frac{3}{2}}]$
- κυρτή στο $[e^{-\frac{3}{2}},+\infty)$.

Άρα παρουσιάζει σημείο καμπής το Μ $(e^{-\frac{3}{2}},-\frac{3}{2e^3})$.

γ. Είναι:

- $\lim\limits_{x\to o^+} f(x)=\lim\limits_{x\to o^+} x^2\ln x=\lim\limits_{x\to o^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}\overset{(De\,L'Hospital)}{=}$

$$=\lim_{x\to o^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2x}{x^4}}=\lim_{x\to o^+}\left(-\frac{x^4}{2x^2}\right)=-\lim_{x\to o^+}\frac{x^2}{2}=0.$$

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x^2 \cdot \ln x\right) = +\infty$.

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο διάστημα $(0,e^{-\frac{1}{2}}]$, είναι

$$f\left((0,e^{-\frac{1}{2}}]\right) = [-\frac{1}{2e},0).$$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $[e^{-\frac{1}{2}},+\infty)$ είναι

$$f\left([e^{-\frac{1}{2}},+\infty)\right) = [-\frac{1}{2e},+\infty).$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι $f\left((0,+\infty)\right) = [-\frac{1}{2e},0) \cup [-\frac{1}{2e},+\infty) = [-\frac{1}{2e},+\infty)$.

Έτσι, το τοπικό ακρότατο απο το ερώτημα α, μπορεί να χαρακτηριστει και ως ολικό ελάχιστο.

ΘΕΜΑ 3ο

α. Αφού f παραγωγίσιμη στο R, τότε και η g είναι παραγωγίσιμη στο R ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων σε αυτό. Άρα η g είναι και συνεχής στο R.

Έτσι η g είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{3}{2}\right] \subseteq \mathrm{R}$ και παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{3}{2}\right) \subseteq \mathrm{R}$ με

$g'(x) = e^x f(x) + e^x f'(x)$.

Επίσης είναι $\left.\begin{array}{l} g(0) = e^0 f(0) = 0 \\ g\left(\frac{3}{2}\right) = e^{\frac{3}{2}} f\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \end{array}\right|$ άρα $g(0) = g\left(\frac{3}{2}\right)$.

Οπότε από θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(0,\frac{3}{2}\right)$ ώστε

$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^{\xi} f(\xi) + e^{\xi} f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^{\xi}\left(f(\xi)\right) + f'(\xi) = 0$.

Όμως $e^{\xi} \neq 0$ άρα προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in \left(0,\frac{3}{2}\right)$ ώστε

$$f'(\xi) = -f(\xi).$$

β. Αφού $f(x) = 2x^2 - 3x$ είναι

$I(\alpha) = \int_{\alpha}^{0} g(x)dx = \int_{\alpha}^{0} e^x\left(2x^2 - 3x\right)dx = \int_{\alpha}^{0}\left(e^x\right)'\left(2x^2 - 3x\right)dx =$

$= \left[e^x\left(2x^2 - 3x\right)\right]_{\alpha}^{0} - \int_{\alpha}^{0} e^x (2x^2 - 3x)'\,dx =$

$= \left[e^x\left(2x^2 - 3x\right)\right]_{\alpha}^{0} - \int_{\alpha}^{0} e^x (4x - 3)dx = \left[e^x\left(2x^2 - 3x\right)\right]_{\alpha}^{0} - \int_{\alpha}^{0}\left(e^x\right)'(4x - 3)dx =$

$= \left[e^x\left(2x^2 - 3x\right)\right]_{\alpha}^{0} - \left[e^x\left(4x - 3\right)\right]_{\alpha}^{0} + \int_{\alpha}^{0} e^x (4x - 3)'\,dx =$

$$= \left[e^x\left(2x^2 - 3x\right)\right]_\alpha^0 - \left[e^x\left(4x-3\right)\right]_\alpha^0 + \int_\alpha^0 e^x \cdot 4dx =$$

$$= \left[e^x\left(2x^2 - 3x\right)\right]_\alpha^0 - \left[e^x\left(4x-3\right)\right]_\alpha^0 + 4\left[e^x\right]_\alpha^0 =$$

$$= -e^\alpha\left(2\alpha^2 - 3\alpha\right) - e^0(-3) + e^\alpha(4\alpha - 3) + 4e^0 - 4e^\alpha =$$

$$= -e^\alpha\left(2\alpha^2 - 3\alpha\right) + 3 + e^\alpha(4\alpha - 3) + 4 - 4e^\alpha = 7 + e^\alpha\left(4\alpha - 3 - 2\alpha^2 + 3\alpha - 4\right) =$$

$$= 7 + e^\alpha\left(-2\alpha^2 + 7\alpha - 7\right).$$

Άρα $I(\alpha) = 7 + e^\alpha\left(-2\alpha^2 + 7\alpha - 7\right), \alpha \in R$.

γ. Είναι για α < 0 , $I(\alpha) = 7 + e^\alpha \cdot a^2\left[-2 + \frac{7}{a} - \frac{7}{a^2}\right]$.

Έχουμε $\lim_{\alpha\to-\infty}\left(e^\alpha \cdot \alpha^2\right) = \lim_{\alpha\to-\infty}\frac{\alpha^2}{\frac{1}{e^\alpha}} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{\alpha\to-\infty}\frac{2\alpha}{-e^{-\alpha}} \overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{=} \lim_{\alpha\to-\infty}\frac{2\alpha}{e^{-\alpha}} = 0$

και $\lim_{\alpha\to-\infty}\left[-2 + \frac{7}{\alpha} - \frac{7}{\alpha^2}\right] = -2$

Άρα $\lim_{\alpha\to-\infty} I(\alpha) = 7 + 0(-2) = 7$.

ΘΕΜΑ4ο

α. Η συνάρτηση g(x) γράφεται:

$$g(x) = |z| \cdot \int_1^{x^3} f(t)dt - 3\cdot\left|z + \frac{1}{z}\right|\cdot(x-1).$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο R, η συνάρτηση φ(x)= $\int_1^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό.

Ακόμα, η συνάρτηση $h(x) = x^3$ είναι παραγωγίσιμη στο R ως πολυωνυμική.

Έτσι η συνάρτηση $F(x) = \int_1^{x^3} f(t)dt = \phi(h(x))$ είναι παραγωγίσιμη στο R ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων h και φ στο R, με

$$F'(x) = f(x^3)\cdot 3x^2 = 3x^2 \cdot f(x^3).$$

Ακόμα η συνάρτηση $l(x) = 3\cdot\left|z + \frac{1}{z}\right|\cdot(x-1)$ είναι παραγωγίσιμη στο R με

$$l'(x) = 3\cdot\left|z + \frac{1}{z}\right|.$$

Επομένως η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο R ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(x) = 3x^2\cdot|z|\cdot f(x^3) - 3\cdot\left|z + \frac{1}{z}\right|.$$

β. Αφού $g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in R$ και g(1)=0, η δοσμένη ανισότητα γράφεται: $g(x)\geq g(1)$ για κάθε $x\in R$.

Έτσι όμως η g στο x_0=1 παρουσιάζει ελάχιστο και επειδή είναι παραγωγίσιμη σε αυτό συνεπάγεται απο θ. Fermat ότι g′(1)=0.

Όμως g′(1)=$3\cdot|z|\cdot f(1)-3\cdot\left|z+\dfrac{1}{z}\right|$ και επειδή f(1)=1 βρίσκουμε ότι g′(1)=$3\cdot|z|-3\cdot\left|z+\dfrac{1}{z}\right|$.

Αφού g′(1)=0, έπεται $|z|=\left|z+\dfrac{1}{z}\right|$.

γ. Επειδή είναι $|z|=\left|z+\dfrac{1}{z}\right|$, προκύπτει ότι $|z|^2=\left|z+\dfrac{1}{z}\right|^2 \Leftrightarrow z\cdot\bar{z}=(z+\dfrac{1}{z})\cdot(\bar{z}+\dfrac{1}{\bar{z}})$

$$\Leftrightarrow z\cdot\bar{z}=z\cdot\bar{z}+\frac{z}{\bar{z}}+\frac{\bar{z}}{z}+\frac{1}{z\cdot\bar{z}} \Leftrightarrow 0=z^2+\bar{z}^2+1 \Leftrightarrow z^2+\bar{z}^2=-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^2+\bar{z}^2=-1 \Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(z^2)=-1 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z^2)=-\frac{1}{2}.$$

δ. Είναι
$z^2=(a+\beta\cdot i)^2=\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta\cdot i$ οπότε $\operatorname{Re}(z^2)=a^2-\beta^2$ και λόγω του ερωτήματος γ έχουμε:

$$a^2-\beta^2=-\frac{1}{2}\ ή\ (\alpha-\beta)\cdot(\alpha+\beta)=-\frac{1}{2}.$$

Επειδή α>β προκύπτει ότι

$$\alpha+\beta<0\text{, οπότε }\beta<-\alpha<0.$$

Έτσι για την συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο R άρα και στο [2,3] είναι:

f(2)=α>0 και f(3)=β<0, οπότε f(2)·f(3) <0.

Συνεπώς, εφαρμόζοντας το θεώρημα Bolzano για την f στο διάστημα [2,3], συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $x_0\in(a,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.