ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Θεωρία. Σχολ. βιβλίο σελ. 253
Α.2 Ορισμός. Σχολ. βιβλίο σελ. 273
Β. α $\to$ Λ
β $\to$ Σ
γ $\to$ Σ
δ $\to$ Λ
ε $\to$ Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α. $f(x) = 2 + (x-2)^2, \quad x \geq 2$
Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[2,+\infty)$ με $f'(x) = 2(x-2) > 0$ για κάθε $x \in (2,+\infty)$.
Άρα f γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$ και επομένως είναι και
1-1.

β. Αφού η f είναι 1-1 υπάρχει η f^{-1} αντίστροφη συνάρτηση της f με
$f^{-1} : f(A) \to R$.

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο Α = $[2,+\infty)$ έπεται ότι
$f(A) = \left[f(2), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = [2,+\infty)$

Τώρα αν $y = f(x) \Leftrightarrow y = 2 + (x-2)^2 \Leftrightarrow y - 2 = (x-2)^2$.

Επειδή $x - 2 \geq 0$, $y - 2 \geq 0$, έχουμε $x - 2 = \sqrt{y-2}, \quad x \in [2,+\infty), \quad y \in [2,+\infty)$

ή $x = 2 + \sqrt{y-2}, \quad x \in [2,+\infty), \quad y \in [2,+\infty)$

ή $f^{-1}(y) = 2 + \sqrt{y-2}, \quad y \in [2,+\infty)$.

Τελικά $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x-2}, \quad x \in [2,+\infty)$.

γ. i) Έχουμε

$$\begin{Bmatrix} y = f(x) \\ y = x \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} y = 2 + (x-2)^2 \\ y = x \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2 + (x-2)^2 = x \\ y = x \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} (x-2)^2 = x - 2 \\ y = x \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} x = 2 \\ y = 2 \end{pmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix} x = 3 \\ y = 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{Bmatrix} y = f^{-1}(x) \\ y = x \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = 2 + \sqrt{x-2} \\ y = x \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} y = 2 + \sqrt{x-2} \\ y = x \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2 + \sqrt{x-2} = x \\ y = x \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \sqrt{x-2} = x - 2 \\ y = x \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x - 2 = (x-1)^2 \\ y = x \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} x = 2 \\ y = 2 \end{pmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix} x = 3 \\ y = 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων f και f^{-1} με την y = x είναι τα A(2,2), B(3,3).

ii)
Οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι συνεχείς άρα και η διαφορά τους είναι συνεχής.
$f(x) - f^{-1}(x) = [2 + (x-2)^2] - [2 + \sqrt{x-2}] = (x-2)^2 - \sqrt{x-2} = \sqrt{x-2} \cdot \left(\sqrt{x-2}^{\,3} - 1 \right)$ Προκύπτει $f(x) - f^{-1}(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 0$ ή $\left(\sqrt{x-2}\right)^3 = 1 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = 3$.
Δηλαδή τα κοινά τους σημεία είναι τα A(2,2), B(3,3).

Επειδή $2 \le x \le 3 \Leftrightarrow 0 \le x - 2 \le 1 \Leftrightarrow$
$\sqrt{x-2} \le 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-2}^{\,3} \le 1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-2}\right)^3 - 1 \le 0$.

Επίσης είναι $\sqrt{x-2} \ge 0$ για $x \in [2,3]$.

Άρα $f(x) - f^{-1}(x) \le 0$ για $x \in [2,3]$.

Οπότε το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου είναι

$$E = \int_2^3 \left(f^{-1}(x) - f(x)\right)dx = \int_2^3 \left(\sqrt{x-2} - (x-2)^2\right)dx = \frac{1}{3} \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 3ο

α.i Από τη σχέση $z_1+z_2+z_3=0$ έχουμε ισοδύναμα $z_1=-z_2-z_3$ (1).

Θα δείξουμε ότι $|z_1-z_2|=|z_3-z_1|$ (2).

Πράγματι η (2) λόγω της (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$|-z_2-z_3-z_2|=|z_3+z_2+z_3| \Leftrightarrow$$
$$|2z_2+z_3|=|2z_3+z_2| \Leftrightarrow$$
$$|2z_2+z_3|^2=|2z_3+z_2|^2 \Leftrightarrow$$
$$(2z_2+z_3)\overline{(2z_2+z_3)}=(2z_3+z_2)\overline{(2z_3+z_2)} \Leftrightarrow$$
$$(2z_2+z_3)(2\overline{z}_2+\overline{z}_3)=(2z_3+z_2)(2\overline{z}_3+\overline{z}_2) \Leftrightarrow$$
$$4z_2\overline{z}_2+2z_2\overline{z}_3+2z_3\overline{z}_2+z_3\overline{z}_3=4z_3\overline{z}_3+2z_3\overline{z}_2+2z_2\overline{z}_3+z_2\overline{z}_2 \Leftrightarrow$$
$$3z_2\overline{z}_2=3z_3\overline{z}_3 \Leftrightarrow$$
$$z_2\overline{z}_2=z_3\overline{z}_3 \Leftrightarrow$$
$$|z_2|^2=|z_3|^2 \Leftrightarrow$$
$$|z_2|=|z_3|.$$

Η τελευταία σχέση είναι αληθής λόγω της υπόθεσης, άρα και η (2).

Με ανάλογο τρόπο δείχνουμε ότι $|z_3-z_1|=|z_2-z_3|$ (3).

Από τις (2) και (3) προκύπτει ότι $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|$.

Άρα $|z_1-z_2|=|z_3-z_1|=|z_2-z_3|$.

α.ii Είναι:

$|z_1-z_2|=|z_1+(-z_2)|\leq|z_1|+|-z_2|=|z_1|+|z_2|=1+1+=2$

Άρα $|z_1-z_2|\leq 2$.

Οπότε $|z_1-z_2|^2\leq 4$.

Τότε:

$$|z_1-z_2|^2\leq 4 \Leftrightarrow$$
$$(z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}\leq 4 \Leftrightarrow$$
$$(z_1-z_2)(\overline{z}_1-\overline{z}_2)\leq 4 \Leftrightarrow$$
$$z_1\overline{z}_1-z_1\overline{z}_2-z_2\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2\leq 4 \Leftrightarrow$$
$$|z_1|^2+|z_2|^2-(z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1z_2)\leq 4 \Leftrightarrow$$
$$1+1-(z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1z_2)\leq 4 \Leftrightarrow$$
$$z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1\cdot z_2\geq -2 \Leftrightarrow$$
$$z_1\overline{z}_2+\overline{z_1\overline{z}_2}\geq -2 \Leftrightarrow$$
$$2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2)\geq -2 \Leftrightarrow$$
$$\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2)\geq -1.$$

β. Επειδή $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ προκύπτει ότι οι εικόνες των μιγαδικών $\mathrm{A}(z_1), \mathrm{B}(z_2), \Gamma(z_3)$ βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο Ο (0, 0) και ακτίνα

ρ = 1. Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο παραπάνω κύκλος.
Λόγω τώρα της σχέσης $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$ προκύπτει ότι οι κορυφές $\mathrm{A}(z_1), \mathrm{B}(z_2), \Gamma(z_3)$ αποτελούν κορυφές ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Πρέπει x > 0 και $x \neq 1$. Άρα $A_f = (0,1) \cup (1,+\infty)$.
Η f είναι παραγωγίσιμη στο A_f ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με
$f'(x) = -\left[\frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x}\right] < 0$ για κάθε $x \in A_f$.
Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα
(0, 1) και (1, +∞).
Επειδή τώρα $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ και η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο (0, 1) είναι $f((0,1)) = \mathfrak{R}$.
Επίσης επειδή $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ και η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο (1, +∞), είναι $f((1,+\infty)) = \mathfrak{R}$.
Έτσι συνολικά το σύνολο τιμών της f είναι $f((0,1) \cup (1,+\infty)) = \mathfrak{R}$.

β. Επειδή $f((0,1)) = \mathfrak{R}$ έπεται $O \in f((0,1))$ δηλαδή υπάρχει $x_1 \in (0,1)$ ωστε $f(x_1) = 0$.
Η ρίζα αυτή είναι μοναδική στο (0,1), αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα και άρα 1-1.
Ομοίως επειδή $f((1,+\infty)) = \mathfrak{R}$ έπεται $O \in f((1+\infty))$ δηλαδή υπάρχει $x_2 \in (1,+\infty)$ ώστε $f(x_2) = 0$.
Η ρίζα αυτή είναι επίσης μοναδική στο (1,+ ∞), αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα και άρα 1-1.
Έτσι η f έχει ακριβώς 2 ρίζες.

γ. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $g(x) = \ln x$ στο σημείο $A(\alpha, \ln\alpha)$, α>0 είναι:
$y = \frac{1}{\alpha}x - 1 + \ln a$ (ε_1)
Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f(x) = e^x$ στο σημείο $B(\beta, e^\beta)$, $\beta \in \mathfrak{R}$ είναι:
$y = e^\beta x + e^\beta - \beta e^\beta$ (ε_2).
Οι (ε_1), (ε_2) ταυτίζονται αν και μόνο αν
$\frac{1}{\alpha} = e^\beta \Leftrightarrow \beta = -\ln\alpha$ (1) και $\ln\alpha - 1 = e^\beta - \beta \cdot e^\beta$ (2)
Τότε η (2) γράφεται:

$$\ln\alpha - 1 = \frac{1}{\alpha} + \ln\alpha\frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow$$
$$\alpha\ln\alpha - \alpha = 1 + \ln\alpha \Leftrightarrow$$
$$-\alpha - 1 = (\ln\alpha)(1-\alpha) \Leftrightarrow$$
$$\frac{\alpha+1}{\alpha-1} = \ln\alpha \Leftrightarrow$$
$$\frac{\alpha+1}{\alpha-1} - \ln\alpha = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = 0.$$

δ.

Από το 4γ προκύπτει ότι οι γραφικές παραστάσεις των g(x), h(x) έχουν κοινή εφαπτόμενη στα σημεία τους Α(α, lnα) και Β(β, e^{β}) αντίστοιχα αν και μόνον αν:

$$\begin{pmatrix} \beta = -\ln\alpha \\ f(\alpha) = 0 \end{pmatrix}$$

Επειδή η f(x) = 0 έχει δύο διακεκριμένες ρίζες $\alpha_1 \in (0,1)$ και $\alpha_2 \in (1,+\infty)$ προκύπτουν δύο εφαπτόμενες οι

$$(\varepsilon_1): y = \frac{1}{\alpha_1}x - 1 + \ln\alpha_1$$
$$(\varepsilon_2): y = \frac{1}{\alpha_2}x - 1 + \ln\alpha_2.$$

Οι εφαπτόμενες αυτές είναι ακριβώς δύο (διακεκριμένες) αφού έχουν δύο διακεκριμένους συντελεστές διεύθυνσης $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}$ αντίστοιχα.

$$\left(\frac{1}{\alpha_1} \in (1,+\infty), \frac{1}{\alpha_2} \in (0,1)\right).$$