Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΕΠΙΛΟΓΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1ο

Α.1. Θεωρία από Σχ. Βιβλίο σελ. 92
Α.2. Θεωρία από Σχ. Βιβλίο σελ. 149
Α.3. Απόδειξη από Σχ. Βιβλίο σελ. 28-29
Β. α → Λάθος
β → Σωστό
γ → Σωστό
δ → Λάθος
ε → Λάθος

Θέμα 2ο

α) Πρέπει $x+2\geq 0$ και $\sqrt{x+2}-2\neq 0$

$x\geq -2$ και έστω $\sqrt{x+2}-2=0$

τότε $\sqrt{x+2}=2$

$x+2=4$

$x=2$

Άρα $\sqrt{x+2}-2\neq 0$ όταν $x\neq 2$.

Οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι το $[-2,2)\cup(2,+\infty)$.

β) Τα ζητούμενα σημεία είναι αυτά για τα οποία ισχύει f(x)=0. Άρα:

$x^2-4=0$ και $x\in[-2,2)\cup(2,+\infty)$

$x^2=4$ και $x\in[-2,2)\cup(2,+\infty)$

$x=\pm 2$ και $x\in[-2,2)\cup(2,+\infty)$

Άρα $x=-2$.

Οπότε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης με τον x΄x είναι το M(-2,0).

γ) $$f(x)=\frac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-2}=\frac{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\frac{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-2^2}=$$

$$=\frac{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{x+2-4}=\frac{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{x-2}=(x+2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(x+2)\left(\sqrt{x+2}+2\right) = (2+2)\left(\sqrt{4}+2\right) = 4\cdot 4 = 16$

δ) Ο πίνακας γίνεται:

x_i	v_i	f_i	N_i	F_i
1	4	0,1	4	0,1
2	16	0,4	20	0,5
3	12	0,3	32	0,8
4	8	0,2	40	1
Σύνολο	40	1	-	-

$$f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{4}{40} = 0{,}1$$

$$N_1 = v_1 = 4$$

$$F_1 = f_1 = 0{,}1$$

$$f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{16}{40} = 0{,}4\,, \qquad N_2 = v_1 + v_2 = 4 + 16 = 20$$

$$F_2 = f_1 + f_2 = 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}5$$

$$f_4 = \frac{v_4}{v} \Rightarrow v_4 = f_4 \cdot v = 0{,}2 \cdot 40 = 8$$

$$N_4 = v = 40 \quad \text{και} \quad F_4 = 1$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 40 \Rightarrow 4 + 16 + v_3 + 8 = 40 \Rightarrow v_3 = 40 - 28 = 12$$

$$f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{12}{40} = 0{,}3 \quad , \quad N_3 = N_2 + v_3 = 20 + 12 = 32$$

$$F_3 = F_2 + f_3 = 0{,}5 + 0{,}3 = 0{,}8$$

<u>Θέμα 3^{ο}</u>

α) Στον παρακάτω πίνακα «διπλής εισόδου» καταγράφουμε τα δεδομένα μας.

Φύλλο \ **Τμήμα**	**Διοικητικό τμήμα**	**Τεχνικό τμήμα**	**Σύνολο**
Άνδρες	10	50	60
Γυναίκες	30	10	40
Σύνολο	40	60	100

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{50}{100} = 0,5$$

B_1: «είναι το ενδεχόμενο το άτομο να είναι άνδρας»
B_2: «είναι το ενδεχόμενο το άτομο να εργάζεται στο διοικητικό τμήμα».

$$B = (B_1 \cup B_2) \Rightarrow P(B) = P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P\left(B_2\right) - P(B_1 \cap B_2)$$
$$= \frac{60}{100} + \frac{40}{100} - \frac{10}{100} = \frac{90}{100} = 0,9$$

β) Το άθροισμα των ηλικιών όλων των υπαλλήλων θα είναι:

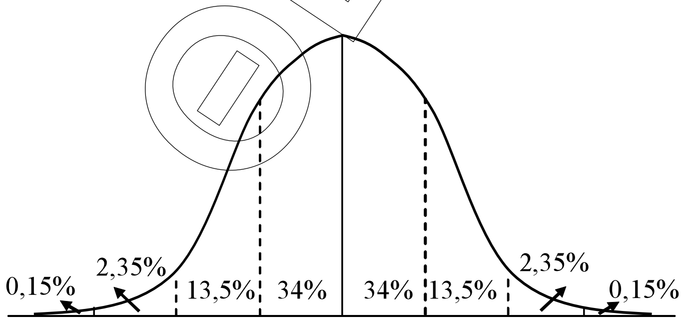
$$\sum_{i=1}^{100} t_i = 60 \cdot 40 + 40 \cdot 40 = 2400 + 1600 = 4000$$

Μετά την πρόσληψη των νεότερων υπαλλήλων το άθροισμα των ηλικιών των υπαλλήλων θα είναι:

$$\overline{y} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i \quad \text{άρα} \quad \sum_{i=1}^{\nu} t_i = \nu \cdot \overline{y} \quad \text{δηλαδή} \quad \sum_{i=1}^{100} t_i = 100 \cdot 39,6 = 3960$$

Έστω c το πλήθος των ατόμων που αποχώρησαν. Επειδή θα προσληφθούν c άτομα αλλά κατά 4 χρόνια νεότερα, θα ισχύει ότι: 4000 – 3960 = 4c δηλαδή 4c = 40 άρα c = 10

γ) Η καμπύλη συχνοτήτων στην κανονική κατανομή είναι:

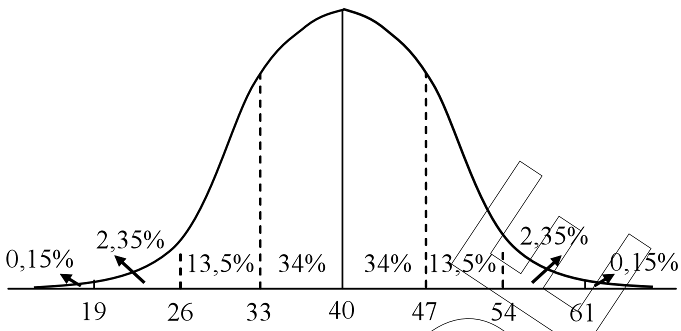


Επειδή το 2,5% (δηλαδή 2,35% + 0,15% = 2,5%) των υπαλλήλων έχει ηλικία το πολύ 26 χρόνια, $\overline{x} - 2s = 26$ **(1)**

Η μέση ηλικία όλων των υπαλλήλων είναι: $\overline{x} = \dfrac{60 \cdot 40 + 40 \cdot 40}{100} = 40$

Από τη σχέση **(1)** έχουμε: 2s = 14 $\Leftrightarrow$ s = 7.

Επομένως η καμπύλη συχνοτήτων θα είναι:



Κάτω από 33 χρόνια θα είναι το 13,5% + 2,35% + 0,15% = 16% των υπαλλήλων της εταιρίας δηλ. $\dfrac{16}{100} \cdot 100 = 16$ υπάλληλοι.

δ) Είναι: $s^2 = \dfrac{1}{100}\left[\sum_{i=1}^{\kappa} v_i x_i^2 - \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{\kappa} v_i x_i\right)^2}{100}\right] \Leftrightarrow S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{\kappa} v_i x_i^2}{100} - \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{\kappa} v_i x_i\right)^2}{100^2} \Leftrightarrow$

$$100^2\ s^2 = 100^2\ \frac{\sum_{i=1}^{\kappa} v_i x_i^2}{100} - 100^2\ \frac{\left(\sum_{i=1}^{\kappa} v_i x_i\right)^2}{100^2} \Leftrightarrow 100^2\ s^2 = 100 \cdot \sum_{i=1}^{\kappa} v_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{\kappa} v_i x_i\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 10000\ s^2 = 250000 \Leftrightarrow S^2 = 25 \Leftrightarrow S = 5$$

Στην κανονική κατανομή το εύρος $R \approx 6s$, επομένως $R \approx 30$.

Θέμα 4ο

Α. Είναι: $\bar{x} = \dfrac{x+5e^x+x+4-7x+1}{5} = \dfrac{5e^x-5x+5}{5} = e^x - x + 1$

Έστω f(x)= e^x-x+1, $x \in \Re$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ με f΄(x) = e^x-1.

Έχουμε $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow e^x \geq e^0 \Leftrightarrow x \geq 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f΄(x)	-	0	+
f(x)	↘	2 min	↗

Για x=0 η f παρουσιάζει ελάχιστο το $m = f(0) = 2$

Β. Για m=2 είναι: g(x)=2x^2-κ^{2}x+3.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ με g΄(x)=4x-κ^2.

Η εφαπτομένη της C_g στο Α(1, g(1)) είναι παράλληλη στον x΄x όταν g΄(1)=0

$\Leftrightarrow$ 4-κ^2=0 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ κ^2=4 $\Leftrightarrow$

κ=2 ή κ=-2 (**απορρίπτεται** αφού $\kappa \in \Omega$)

Άρα κ=2.

Ε={1,3,4,5,6,7}

Οπότε $P(\mathrm{E}) = \dfrac{N(\mathrm{E})}{N(\Omega)} = \dfrac{6}{7}$

Γ. Αφού $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$ τότε $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{A}$ και $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})$ οπότε

$\mathrm{h}(\mathrm{x}) = \dfrac{3 - 2 \cdot \mathrm{P}(A)}{12}\mathrm{x}^3 + \dfrac{\mathrm{P}(A)}{2}\mathrm{x}^2 + \mathrm{x} + 2008,\ x \in R$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο R με $\mathrm{h}'(\mathrm{x}) = \dfrac{3 - 2 \cdot P(A)}{4}\mathrm{x}^2 + P(A) \cdot \mathrm{x} + 1,\ x \in R$

και

$\Delta = P^2(A) - 4 \cdot \dfrac{3 - 2 \cdot P(A)}{4} \cdot 1 = P^2(A) - 3 + 2 \cdot P(A) = P^2(A) + 2 \cdot P(A) + 1 - 4 =$

$= (P(A)+1)^2 - 4 < 0$ γιατί:

Το ενδεχόμενο Α αποκλείεται να είναι ο δειγματικός χώρος Ω (διότι αν ήταν, θα έπρεπε και Β=Ω, άτοπο αφού Α $\neq$ Β) άρα Ρ(Α) $\neq 1$ και επειδή $0 \leq \mathrm{P}(\mathrm{A}) \leq 1$ έπεται ότι $0 \leq \mathrm{P}(\mathrm{A}) < 1$ άρα Ρ(Α)+1<2 οπότε $(P(A)+1)^2 < 4$.

(εναλλακτικά: το τριώνυμο $P^2(A) + 2 \cdot P(A) - 3$ ***έχει Δ' =16 και ρίζες τις -3 και 1 οπότε για Ρ(Α)*** $\in [0,1)$ ***είναι*** $P^2(A) + 2 \cdot P(A) - 3 < 0$ ***).***

Αφού Δ<0 η $h'(x)$ παίρνει τιμές ομόσημες του $\frac{3-2\cdot P(A)}{4}$ για κάθε $x \in R$ και αφού $\frac{3-2\cdot P(A)}{4}$ φανερά θετικό, έχω $h'(x)>0$ για κάθε $x \in R$, άρα η συνάρτηση h είναι γνήσια αύξουσα στο R.