

**ΤΑΞΗ:** Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ:** ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 7 Ιανουαρίου 2017

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

**ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x}$ . Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  και ισχύει:  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

Μονάδες 7

**A2.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της

Μονάδες 4

**A3.** Έστω συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ . Πότε η  $f$  λέγεται 1-1 συνάρτηση;

Μονάδες 4

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

(i) Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ .

(ii) Κάθε συνάρτηση διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα όπου οι διαδοχικές της ρίζες χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

(iii) Ισχύει  $(x^{-v})' = -vx^{v-1}$  για κάθε  $v \in \mathbb{N}$

(iv) Κάθε συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι 1-1 είναι και γνησίως μονότονη στο  $A$ .

(v) Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $|\eta\mu x| > |x|$ .

Μονάδες 10

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017**  
Α' ΦΑΣΗ

**E\_3.ΜΛ3ΘΟ(ε)**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \frac{2x+6}{x-2}, x \neq 2$  και  $g(x) = 1 - \frac{2}{2e^x + 1}, x \in \mathbb{R}$ .

**B1.** Να δείξετε ότι η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

**Μονάδες 8**

**B2.** Να αποδείξετε ότι η  $g$  αντιστρέφεται και να βρείτε την  $g^{-1}$ .

**Μονάδες 5**

**B3.** Να ορίσετε τη παράσταση  $f \circ f$ .

**Μονάδες 6**

**B4.** Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$  με  $\alpha < x_1 < x_2 < x_3 < \beta$  υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$  τέτοιο ώστε

$$g(x_0) = \frac{g(x_1) + g(x_2) + g(x_3)}{3}$$

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν :

- $(x-2) \cdot f(x) = \kappa x^2 + \lambda x + 2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και για κάποια  $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f^2(2) - 25)x^3 + f(2)x^2 - 3x + 9}{x^2 + 2x - 6} = 5$
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h) - 5}{h} = 9$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $f(2) = 5$  και  $f'(2) = 3$ .

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι  $\kappa = 3$  και  $\lambda = -7$ .

**Μονάδες 5**

**Γ3. (i)** Για  $\kappa = 3$  και  $\lambda = -7$  να βρείτε το τύπο της  $f$ .

**Μονάδες 2**

**(ii)** Αν  $f(x) = 3x - 1, x \in \mathbb{R}$  να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  εφάπτεται στη γραφική παράσταση της  $g$  με

$$g(x) = \ln(x+1) + 2x - 1, x \in (-1, +\infty)$$

**Μονάδες 6**

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017**  
Α' ΦΑΣΗ

**E\_3.ΜΛ3ΘΟ(ε)**

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $h(x) = x + 1 - e^{1-2x}$  με  $x \in (-1, +\infty)$  τέμνει τη γραφική παράσταση της  $g$  σε ένα μόνο σημείο του άξονα  $x'x$ .

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  και η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $g$  με πεδίο ορισμού  $A = (0, +\infty)$  και το σύνολο τιμών  $g(A) = (0, +\infty)$  για τις οποίες ισχύουν:

- $f^3(x) + xf^2(x) \leq 2\eta\mu^3 x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- $\alpha e^{g(x)} + \sqrt{g(x)} = x + \alpha$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$  και  $\alpha$  κάποιος πραγματικός αριθμός
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

**Δ1.** Να δείξετε ότι  $\alpha = 1$ .

**Μονάδες 6**

Αν  $\alpha = 1$

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε την αντιστροφή της.

**Μονάδες 7**

**Δ3.** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g$  στο σημείο της με τετμημένη  $x_0 = e$ .

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $g^{-1}$  έχει μια τουλάχιστον εφαπτόμενη η οποία διέρχεται από το σημείο  $A(1, 0)$ .

**Μονάδες 6**