ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Ζήτημα 1ο

Α.1. Επειδή τα ενδεχόμενα $A-B$ και $A\cap B$ είναι ασυμβίβαστα και $(A-B) \cup (A\cap B) = A$

Έχουμε:

$$P(A) = P(A-B) + P(A\cap B)$$

Άρα:

$$P(A-B) = P(A) - P(A\cap B)$$

Α.2. **α.** $P(A') = 1 - P(A)$

β. $A \subseteq B$ τότε: $P(B) \geq P(A)$

Β.1. **α.**

Αφού

$$A' \subseteq B \Rightarrow P(A') \leq P(B) \Rightarrow 1 - P(A) \leq P(B) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(B) + P(A) \geq 1$$

Άρα:

α. Λάθος

β.

Επειδή:

$$P(A) = P(A') \Rightarrow$$
$$P(A) = 1 - P(A) \Rightarrow$$
$$2P(A) = 1 \Rightarrow$$
$$2P(A) = P(\Omega)$$

Άρα:

β. Σωστό

Β.2. Αφού:

$$A \subseteq B \Rightarrow A\cap B = A$$

οπότε:

$$P(A\cap B) = P(A) = 1/4$$

Επομένως:

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 1/4 + 5/12 - 1/4 = 5/12$$

Άρα:

β. Σωστό

Β.3.

- $P(A - B) = P(A) - P(A\cap B) = 1/3 - 1/5 = 2/15$
- $P((B - A)') = 1 - P(B - A) = 1 - [P(B) - P(A\cap B)] =$
  $= 1 - P(B) + P(A\cap B) = 1 - 1/4 + 1/5 = 3/4 + 1/5 = 19/20$
- $P((A\cap B)') = 1 - P(A\cap B) = 1 - 1/5 = 4/5$

Άρα:

α. $\leftrightarrow$ 2
β. $\leftrightarrow$ 5
γ. $\leftrightarrow$ 3

Ζήτημα 2ο

Α. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη 2 φορές στο R με:

$$f'(x) = (\text{συν } x + \text{ημ } x)' = -\text{ημ } x + \text{συν } x.$$
$$f''(x) = (-\text{ημ } x + \text{συν } x)' = -\text{συν } x - \text{ημ } x$$

Άρα:

$$f(x) + f''(x) = \text{συν } x + \text{ημ } x - \text{συν } x - \text{ημ } x = 0.$$

Β. Έστω $ψ = α x + β$ η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο Α (0,1).

Τότε θα είναι:

$$f'(0) = α \quad \text{και}$$
$$1 = β.$$

Όμως

$$f'(x) = -\text{ημ } x + \text{συν } x, \text{ οπότε:}$$

$$f'(0) = -\text{ημ } 0 + \text{συν } 0 = 1$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y = x + 1$$

Γ. Είναι:

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\eta\mu\frac{\pi}{2} + \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} = -1.$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} + \eta\mu\frac{\pi}{2} = 1.$$

Επομένως:

$$\lambda \cdot f'\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda \cdot (-1) - 2 \cdot 1 = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\lambda - 2\cdot = 2$$

Άρα:

$$λ = -4$$

Ζήτημα 3ο

Α. Επειδή η σχετική συχνότητα f_3 είναι διπλάσια της $f_1 = F_1 = 0,2$

Έχουμε:

$$f_3 = 2 f_1 = 2 \cdot 0,2 = 0,4$$

Ακόμα:

$$F_2 = f_1 + f_2 \Leftrightarrow 0,5 = 0,2 + f_2 \Leftrightarrow f_2 = 0,3$$

Από την σχέση $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1$

Έχουμε:

$$0,2 + 0,3 + 0,4 + f_4 = 1 \Leftrightarrow f_4 = 1 - 0,9 = 0,1$$

Άρα:

$$f_1 = 0,2, \quad f_2 = 0,3, \quad f_3 = 0,4 \text{ και } f_4 = 0,1$$

Άρα:

$$F_3 = f_1 + f_2 + f_3 = 0,9 \quad \text{και} \quad F_4 = 1$$

Β. Είναι:

$$f_i = \frac{v_i}{v} \Leftrightarrow v_i = v \cdot f_i$$

Επειδή το μέγεθος του δείγματος είναι $v = 80$, οι αντίστοιχες συχνότητες v_i με $i = 1, 2, 3, 4$ είναι:
$v_1 = 80 \cdot 0,2 = 16$
$v_2 = 80 \cdot 0,3 = 24$
$v_3 = 80 \cdot 0,4 = 32$
$v_4 = 80 \cdot 0,1 = 8$
Κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα:

[–)	x_i	v_i	f_i	F_i	$v_i x_i$
45 – 55	50	16	0,2	0,2	$50 \cdot 16 = 800$
55 – 65	60	24	0,3	0,5	$60 \cdot 24 = 1440$
65 – 75	70	32	0,4	0,9	$70 \cdot 32 = 2240$
75 – 85	80	8	0,1	1	$80 \cdot 8 = 640$
		$v = 80$	1		

Άρα:

$$\bar{x} = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{4} v_i x_i = \frac{1}{80} \cdot (800 + 1440 + 2240 + 640) =$$
$$= \frac{1}{80} \cdot 5120 = 64$$

Γ.

α. Αν Α είναι το ενδεχόμενο "βάρος μικρότερο από 65 κιλά" τότε η πιθανότητα P(A) είναι:

$$P(A) = \frac{16 + 24}{80} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}$$

β. Αν Β είναι το ενδεχόμενο "βάρος μεγαλύτερο ή ίσο των 55 κιλών και μικρότερο των 75 κιλών" τότε η πιθανότητα P(B) είναι:

$$P(B) = \frac{24 + 32}{80} = \frac{56}{80} = \frac{7}{10}$$

Ζήτημα 4ο

Α. Αφού το 50% των μαθητών χρειάζεται περισσότερο από 12 λεπτά, προκύπτει ότι:

$$\bar{x} = 12 .$$

Επειδή το 16% χρειάζεται λιγότερο από 10 λεπτά, προκύπτει ότι από 10 έως 12 λεπτά χρειάζεται το (50 – 16)% = 34% = (68/2)% των μαθητών.
Άρα:

$$\bar{x} - s_x = 10 \Leftrightarrow 12 - s_x = 10 \Leftrightarrow s_x = 2$$

Β. Είναι:

$$CV_1 = \frac{s_x}{\bar{x}} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$ περίπου 16,6%.

Επειδή 16,6% > 10%, προκύπτει ότι το δείγμα είναι ανομοιογενές.

Γ. Έχουμε:

$$\bar{x} = 12$$

$$\bar{x} + s_x = 14$$

$$\bar{x} + 2 \cdot s_x = 16$$

Το ποσοστό των μαθητών που κάνουν χρόνο διαδρομής από 14 έως 16 λεπτά θα είναι:

$$\left(\frac{95-68}{2}\right)\% = 13{,}5\%$$

Άρα το ζητούμενο πλήθος είναι:

$$40000 \cdot \frac{13{,}5}{100} = 40 \cdot 13{,}5 = 540$$

Δ. Αφού η καθυστέρηση για κάθε μαθητή είναι 5 λεπτά έχουμε σύμφωνα με την εφαρμογή 3 σελίδα 99 του σχολ. βιβλίου ότι:

Η νέα μέση τιμή είναι:

$$\bar{\psi} = \bar{x} + 5 = 12 + 5 = 17$$

Η νέα τυπική απόκλιση είναι:

$$S_\psi = S_x = 2$$

οπότε:

$$CV_2 = \frac{s_\psi}{\bar{\psi}} = \frac{2}{17}$$ περίπου 11,7%.

Άρα η μεταβολή είναι περίπου 5%.