ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία: Παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης f(x)=x, σελ. 28 σχολικού βιβλίου.
Β. Ορισμός: σελ. 13 σχολικού βιβλίου.
Γ. Ορισμός: σελ. 87 σχολικού βιβλίου.
Δ. **α**-Λ
β-Λ
γ-Σ
δ-Σ
ε-Λ.

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:
Γ: ο καθηγητής είναι γυναίκα
Φ: ο καθηγητής είναι φιλόλογος

• Επειδή το 55% των καθηγητών του λυκείου είναι γυναίκες, έχουμε ότι: $P(\Gamma)=0{,}55$.
• Επειδή το 40% των καθηγητών του λυκείου είναι φιλόλογοι, έχουμε ότι: $P(\Phi)=0{,}40$.
• Επειδή το 30% των καθηγητών του λυκείου είναι γυναίκες φιλόλογοι, έχουμε ότι:
$P(\Phi\cap\Gamma)=P(\Gamma\cap\Phi)=0{,}30$.
Επομένως:
α. $P(\Gamma\cup\Phi)=P(\Gamma)+P(\Phi)-P(\Gamma\cap\Phi)=0{,}55+0{,}40-0{,}30=0{,}65$.
β. $P(\Gamma\cap\Phi')=P(\Gamma)-P(\Gamma\cap\Phi)=0{,}55-0{,}30=0{,}25$.
γ. Το ενδεχόμενο ο καθηγητής να είναι άνδρας και φιλόλογος είναι το $\Gamma'\cap\Phi$, άρα:
$P(\Gamma'\cap\Phi)=P(\Phi)-P(\Gamma\cap\Phi)=0{,}40-0{,}30=0{,}10$.
δ. Το ενδεχόμενο ο καθηγητής να είναι άνδρας ή φιλόλογος είναι το $\Gamma'\cup\Phi$, άρα:

$$\begin{aligned}P(\Gamma'\cup\Phi) &= P(\Gamma')+P(\Phi)-P(\Gamma'\cap\Phi) = \\ &= 1-P(\Gamma)+P(\Phi)-P(\Phi)+P(\Gamma\cap\Phi) = \\ &= 1-P(\Gamma)+P(\Gamma\cap\Phi) = 1-0{,}55+0{,}30=0{,}75.\end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Πρέπει $x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)\neq 0 \Leftrightarrow \{x-1\neq 0$ και $x+1\neq 0\} \Leftrightarrow \{x\neq 1$ και $x\neq -1\}$
Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $\Re-\{-1,1\}$ και η σωστή απάντηση είναι η γ.
Β. Η συνάρτηση f ως ρητή είναι παραγωγίσιμη στο $\Re-\{-1,1\}$ με

$$f'(x)=\left(\frac{x}{x^2-1}\right)'=\frac{x'(x^2-1)-x(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2}=$$

$$=\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}=-\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}<0$$ για κάθε $x\in\Re-\{-1,1\}$.

Γ. Είναι:

$$\lim_{x\to -1}[(x+1)\cdot f(x)] = \lim_{x\to -1}\left[(x+1)\cdot \frac{x}{x^2-1}\right] = \lim_{x\to -1}\left[\frac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)}\right] = \lim_{x\to -1}\frac{x}{x-1} = \frac{1}{2}$$

Δ. Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (0,f(0)) με τον άξονα x΄x, τότε θα έχουμε

εφω = f΄(0)

Όμως $f'(0) = -\dfrac{0^2+1}{(0^2-1)^2} = -1$ και επειδή 0 ≤ ω < 180°, προκύπτει ω = 135°.

ΘΕΜΑ 4ο

α.

- Η μέση τιμή είναι:

  Ομάδα Α: $\overline{X_A} = \dfrac{1+8+9+5+3+4}{6} = \dfrac{30}{6} = 5$.

  Ομάδα Β: $\overline{X_B} = \dfrac{7+14+6+4+12+5}{6} = \dfrac{48}{6} = 8$.

- Διατάσσουμε τις παρατηρήσεις κατ' αύξουσα σειρά και έχουμε:

  Ομάδα Α: 1, 3, 4, 5, 8, 9. Επομένως η διάμεσος είναι: $\delta_A = \dfrac{4+5}{2} = 4{,}5$

  Ομάδα Β: 4, 5, 6, 7, 12, 14. Επομένως η διάμεσος είναι: $\delta_B = \dfrac{6+7}{2} = 6{,}5$

β. Προκειμένου να συγκρίνουμε τις ομάδες ως προς την ομοιογένεια θα πρέπει να βρούμε τις τυπικές αποκλίσεις S_A και S_B. Έχουμε:

$S_A^2 = \dfrac{1}{6}\cdot[(1-5)^2 + (8-5)^2 + (9-5)^2 + (5-5)^2 + (3-5)^2 + (4-5)^2] =$

$= \dfrac{1}{6}\cdot[(-4)^2 + 3^2 + 4^2 + 0^2 + (-2)^2 + (-1)^2] =$

$= \dfrac{1}{6}(16 + 9 + 16 + 4 + 1) =$

$= \dfrac{1}{6}46 = \dfrac{46}{6} = \dfrac{23}{3}$.

οπότε:

$S_A = \sqrt{\dfrac{23}{3}}$

$S_B^2 = \dfrac{1}{6}\,[(7-8)^2 + (14-8)^2 + (6-8)^2 + (4-8)^2 + (12-8)^2 + (5-8)^2] =$

$= \dfrac{1}{6}\cdot[(-1)^2 + 6^2 + (-2)^2 + (-4)^2 + 4^2 + (-3)^2] =$

$= \dfrac{1}{6}\cdot[1 + 36 + 4 + 16 + 16 + 9] =$

$= \dfrac{1}{6}82 = \dfrac{82}{6} = \dfrac{41}{3}$

οπότε $S_B = \sqrt{\dfrac{41}{3}}$.

Επομένως,

$CV_A = CV_A = \frac{S_A}{\overline{\overline{x}}_A} = \frac{\sqrt{\frac{23}{3}}}{5} = \sqrt{\frac{23}{75}} \cong \sqrt{0,30}$.

$$CV_B = \frac{S_B}{\overline{\overline{x}}_B} = \frac{\sqrt{\frac{41}{3}}}{8} = \sqrt{\frac{41}{192}} \cong \sqrt{0,21} .$$

Άρα $CV_A > CV_B$ που σημαίνει ότι είναι περισσότερο ομοιογενής η Ομάδα Β.

γ.

- Αν y_i με $i = 1,2,3,4,5,6$ είναι οι παρατηρήσεις της ομάδας Α μετά την αύξηση καθεμιάς κατά 20%, τότε έχουμε
$$y_i = x_i + \frac{20x_i}{100} = x_i\left(1 + \frac{20}{100}\right) = 1{,}2x_i .$$
- Αν ω_i με $i = 1,2,3,4,5,6$ είναι οι παρατηρήσεις της ομάδας Β μετά την αύξηση καθεμιάς κατά 5 ευρώ, τότε έχουμε
$\omega_i = x_i + 5$.
Σύμφωνα τώρα με την εφαρμογή 3, σελίδα 99 του σχολικού βιβλίου έχουμε
$\overline{y} = 1{,}2 \cdot \overline{x_A} = 1{,}2 \cdot 5 = 6$ ευρώ και
$\overline{\omega} = \overline{x_B} + 5 = 8 + 5 = 13$ ευρώ

δ. Έχουμε

- $S_y = |1{,}2| \cdot S_A = 1{,}2 \cdot \sqrt{\frac{23}{3}}$.
- $S_\omega = S_B = \sqrt{\frac{41}{3}}$.

Επομένως οι συντελεστές μεταβολής των νέων ομάδων είναι αντίστοιχα:

$$CV_A = \frac{S_y}{\overline{y}} = \frac{1{,}2 \cdot S_A}{1{,}2 \cdot \overline{x}_A} = CV_A \cong \sqrt{0,30}$$

$$CV_B = \frac{S_\omega}{\overline{\omega}} = \frac{\sqrt{\frac{41}{3}}}{13} = \sqrt{\frac{41}{507}} \cong \sqrt{0,08} .$$

Συνεπώς $CV_{A'} > CV_{B'}$, που σημαίνει ότι η ομάδα Β΄ είναι περισσότερο ομοιογενής από την ομάδα Α΄.