ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΠΑΡΑΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

Ασκήσεις σχ. βιβλίου σελίδων 238 – 239

Ερωτήσεις κατανόησης

Ερώτηση 1.

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

α) $ημ150^o = ημ30^o$ (Σ) **β)** $συν135^o = συν45^o$ (Λ)
γ) $εφ100^o = εφ80^o$ (Λ) **δ)** $εφ75^o = -εφ105^o$ (Σ)
ε) $συν110^o = -συν70^o$ (Σ) **στ)** $ημ140^o = -ημ40^o$ (Λ)

Ερώτηση 2.

Αν για την γωνία x ισχύει $0 \leq x \leq 180^o$, να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις:
α) Αν $ημx = ημ60^o$ τότε $x = 60^o$ ή $x = 120^o$
β) Αν $συνx = -συν120^o$ τότε $x = 60^o$
γ) Αν $εφx = -εφ30^o$ τότε $x = 150^o$

Ερώτηση 3.

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε τριγωνομετρικό αριθμό της στήλης Α τον ίσο του τριγωνομετρικό αριθμό από την στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
α. $ημ140^o$	1. $ημ40^o$
	2. $συν40^o$
β. $συν140^o$	3. $εφ40^o$
	4. $-ημ40^o$
γ. $εφ140^o$	5. $-συν40^o$
	6. $-εφ40^o$

α	β	γ
1	5	6

Ασκήσεις

Άσκηση 1.
Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών
α) 120^o **β)** 135^o **γ)** 150^o
λύση

α) $ημ120^o = ημ60^o = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $συν120^o = -συν60^o = -\dfrac{1}{2}$,

$εφ120^o = -εφ60^o = -\sqrt{3}$

β) $ημ135^o = ημ45^o = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $συν135^o = -συν45^o = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$εφ135^o = -εφ45^o = -1$

γ) $ημ150^o = ημ30^o = \dfrac{1}{2}$, $συν150^o = -συν30^o = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$εφ150^o = -εφ30^o = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Άσκηση 2.
Να αποδείξετε ότι
α) $ημ108^o + συν77^o - ημ72^o + συν103^o = 0$
β) $εφ122^o - εφ58^o \cdot εφ135^o = 0$
λύση
α)
Επειδή $108^o + 72^o = 180^o$ και $103^o + 77^o = 180^o$ θα είναι $ημ108^o = ημ72^o$ και $συν103^o = -συν77^o$
Άρα $ημ108^o + συν77^o - ημ72^o + συν103^o = ημ72^o + συν77^o - ημ72^o - συν77^o = 0$
β)
Επειδή $122^o + 58^o = 180^o$ θα είναι $εφ122^o = -εφ58^o$
και $εφ135^o = -εφ45^o = -1$
Άρα $εφ122^o - εφ58^o \cdot εφ135^o = -εφ58^o - εφ58^o(-1) = -εφ58^o + εφ58^o = 0$

Άσκηση 3.
Να αποδείξετε ότι
α) $συν^2 45^o + συν^2 135^o = 1$
β) $ημ^2 30^o + ημ^2 60^o + ημ^2 120^o + ημ^2 150^o = 2$

λύση
α)
Είναι $συν135^o = -συν45^o$

Άρα $συν^2 45^o + συν^2 135^o = συν^2 45^o + συν^2 45^o = 2 συν^2 45^o = = 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2\cdot\dfrac{2}{4} = 1$

β)

Είναι $ημ120^o = ημ60^o$ και $ημ150^o = ημ30^o$

Άρα $ημ^2 30^o + ημ^2 60^o + ημ^2 120^o + ημ^2 150^o = ημ^2 30^o + ημ^2 60^o + ημ^2 60^o + ημ^2 30^o =$

$= 2\,ημ^2 30^o + 2ημ^2 60^o = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 2\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{3}{4} = 2$

Άσκηση 4.

Να αποδείξετε ότι

$ημ(140^o + x) = ημ(40^o - x)$ και $συν(158^o - x) = -συν(22^o + x)$

λύση

Είναι $(140^o + x) + (40 - x) = 180^o$ άρα $ημ(140^o + x) = ημ(40^o - x)$

και $(158^o - x) + (22^o + x) = 180^o$ άρα $συν(158^o - x) = -συν(22^o + x)$

Άσκηση 5.

Να βρείτε τη γωνία x όταν

α) $ημx = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **β)** $ημx = 1 - ημx$ **γ)** $συνx = \frac{\sqrt{3}}{2}$

δ) $συνx = -\frac{1}{2}$ **ε)** $εφx = -\sqrt{3}$ **στ)** $2εφx = 1 + εφx$

λύση

α) $ημx = \frac{\sqrt{2}}{2}$ οπότε $x = 45^o$ ή $x = 135^o$

β) $ημx = 1 - ημx$ άρα $2ημx = 1$

$ημx = \frac{1}{2}$

$x = 30^o$ ή $x = 150^o$

γ) $συνx = \frac{\sqrt{3}}{2}$ άρα $x = 30^o$

δ) $συνx = -\frac{1}{2} = -συν60^o = συν120^o$ άρα $x = 120^o$

ε) $εφx = -\sqrt{3} = -εφ60^o = εφ120^o$ άρα $x = 120^o$

στ) $2εφx = 1 + εφx$, άρα $εφx = 1$, άρα $x = 45^o$

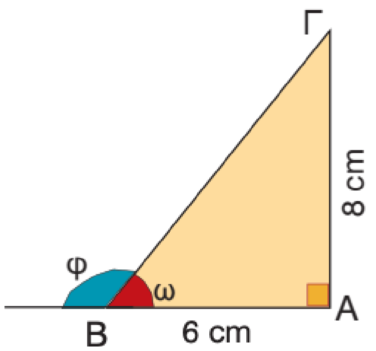
Άσκηση 6.
Να αποδείξετε ότι οι γωνίες ενός παραλληλογράμμου έχουν το ίδιο ημίτονο.
Ισχύει το ίδιο για τα συνημίτονα των γωνιών του ;

λύση
Σε ένα παραλληλόγραμμο οι απέναντι γωνίες είναι ίσες και οι διαδοχικές γωνίες είναι παραπληρωματικές συνεπώς οι γωνίες είτε είναι απέναντι είτε διαδοχικές θα έχουν το ίδιο ημίτονο.
Δεν ισχύει το ίδιο για το συνημίτονο διότι αν οι γωνίες είναι απέναντι έχουν το ίδιο συνημίτονο ενώ αν είναι διαδοχικές έχουν αντίθετα συνημίτονα.

Άσκηση 7.
Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $Β = Δ = 90^ο$. Να αποδείξετε ότι
α) $ημΑ + συνΑ - ημΓ + συνΓ = 0$ **β)** $εφΑ + εφΓ = 0$

λύση
Σε κάθε τετράπλευρο ΑΒΓΔ το άθροισμα των γωνιών του είναι $360^ο$.
Επειδή $Β = Δ = 90^ο$, θα είναι $Α + Γ = 180^ο$
Επομένως $ημΑ= ημΓ$, $συνΑ = -συνΓ$, $εφΑ= -εφΓ$.
Οπότε
α) $ημΑ + συνΑ - ημΓ + συνΓ = ημΑ - συνΓ - ημΑ + συνΓ = 0$
β) $εφΑ + εφΓ = -εφΓ + εφΓ = 0$

Άσκηση 8.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών ω και φ.



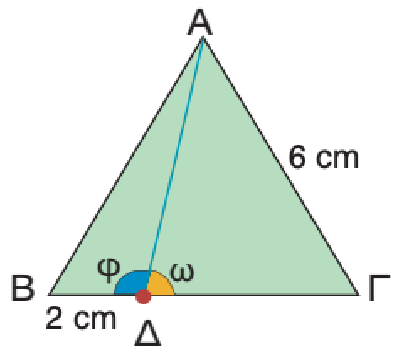
λύση
Πυθαγόρειο στο ΑΒΓ : $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 =$
$= 6^2 + 8^2 =$
$= 100$
Άρα $ΒΓ = 10$

$$εφω = \frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}, \quad ημω = \frac{ΑΓ}{ΒΓ} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}, \quad συνω = \frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Επειδή $ω + φ = 180^ο$ θα είναι $εφφ = -εφω = -\frac{4}{3}$, $ημφ = ημω = \frac{4}{5}$,

$συνφ = -συνω = -\frac{3}{5}$.

Άσκηση 9.
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά 6 cm και σημείο Δ της πλευράς ΒΓ τέτοιο ώστε ΒΔ = 2cm.
Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών ω και φ.



λύση
Φέρνω το ύψος ΑΚ .
Επειδή το τρίγωνο είναι ισόπλευρο, το ύψος είναι και διάμεσος. Άρα ΒΚ = ΚΓ = 3cm

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΓ έχουμε $\eta\mu\Gamma = \frac{AK}{A\Gamma}$ άρα $\eta\mu 60^o = \frac{AK}{6}$

και $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AK}{6}$ δηλαδή $AK = 3\sqrt{3}$

Αφού ΒΚ = 3 και ΒΔ = 2, είναι ΔΚ = 1

Πυθαγόρειο στο ΑΔΚ : $A\Delta^2 = AK^2 + \Delta K^2 = \left(3\sqrt{3}\right)^2 + 1^2 = 27 + 1 = 28$ άρα $A\Delta = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

Επομένως $\varepsilon\varphi\omega = \frac{AK}{\Delta K} = \frac{3\sqrt{3}}{1} = 3\sqrt{3}$,

$$\eta\mu\omega = \frac{AK}{A\Delta} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}}{2(\sqrt{7})^2} = \frac{3\sqrt{21}}{14}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\Delta K}{A\Delta} = \frac{1}{2\sqrt{7}} = \frac{1\cdot\sqrt{7}}{2(\sqrt{7})^2} = \frac{\sqrt{7}}{14}$$

Επειδή $\omega + \varphi = 180^o$ θα είναι $\varepsilon\varphi\varphi = -\varepsilon\varphi\omega = -3\sqrt{3}$,

$$\eta\mu\varphi = \eta\mu\omega = \frac{3\sqrt{21}}{14} ,$$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = -\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{\sqrt{7}}{14}$$

Η αρχική μορφή του φυλλαδίου ανακτήθηκε από τον ιστότοπο netsuccess.gr .